ΠΡΟΤΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ

ΘΕΜΑΤΑ

Γραπτών προαγωγικών εξετάσεων περιόδου Μαΐου - Ιουνίου 2013 στην

ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

Πέμπτη 30 Μαΐου 2013

(Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα)

Όνομα:…..………………………………………………………….

Θέμα Α

Α1) Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

(Μονάδες 10)

Α2) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις: **(5 x 3 Μονάδες)**

i. $\log 10 =$ ….. και $e^{\ln\theta} =$.......
ii. Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το …… και σύνολο τιμών το ……
iii. Οι λύσεις της εξίσωσης ημx=ημθ είναι x =……… όπου $\kappa \in$...... ή x=…….. όπου $\kappa \in$......
iv. Αν το πολυώνυμο P(x) έχει βαθμό μ και το πολυώνυμο Q(x) έχει βαθμό ν με μ>ν, τότε το πολυώνυμο P(x)Q(x) έχει βαθμό ……. ενώ το πολυώνυμο P(x)+Q(x) έχει βαθμό ……
v. Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν ….. ημίτονο και οι γωνίες που διαφέρουν κατά 180° έχουν …… ημίτονο.

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $P(x) = 6x^3 - \lambda x^2 - 4x + 4$, όπου λ πραγματικός αριθμός και το σημείο Α(-1,-9) το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x).

Β1) Να αποδείξετε ότι λ=11.

(Μονάδες 6)

Β2) Να λύσετε την εξίσωση P(x)=0 και να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης P(x) με τον άξονα y'y.

(Μονάδες 8+2)

Β3) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x) βρίσκεται πάνω από τον άξονα των x.

(Μονάδες 9)

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x^2-2x+3\right)$.

Γ1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

Γ2) Να δείξετε ότι η ανίσωση $f\left(e^x\right)>\ln\left(e^x+1\right)$ μετατρέπεται ισοδύναμα στην ανίσωση $e^{2x}-3e^x+2>0$ την οποία και να λύσετε.

(Μονάδες 3+6)

Γ3) Να λύσετε την εξίσωση $f(\eta\mu x)=\ln\left(\sigma\upsilon\nu^2 x+\frac{7}{2}\right)$.

(Μονάδες 9)

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ και $g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Δ1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

(Μονάδες 6)

Δ2) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 6)

Δ3) Αφού αποδείξετε ότι $g(\ln 2)=\frac{3}{4}$ να λύσετε την ανίσωση $g(x)\geq\frac{3}{4}$.

(Μονάδες 3+5)

Δ4) Θεωρώντας γνωστή την ανισότητα $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2$ που ισχύει για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό α, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

(Μονάδες 5)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ο Διευθυντής **Ο εισηγητής**

Αλέξανδρος Συγκελάκης

Σημείωση: Τις εκφωνήσεις τις βρήκα στο http://eisatopon.blogspot.gr/2013/05/2013_21.html

Τις λύσεις τις έκανα εγώ. Αν εντοπίσετε λάθη ή έχετε άλλες παρατηρήσεις παρακαλώ αν μπορέσετε να μου τις επισημάνετε.

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α1) ΘΕΩΡΗΜΑ(ακέραιων ριζών)

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν ο $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε διαδοχικά έχουμε:

$\alpha_\nu \rho^\nu + \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1\rho + \alpha_0 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha_0 = -\alpha_\nu\rho^\nu - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} - \ldots - \alpha_1\rho$

$\Leftrightarrow \alpha_0 = \rho(-\alpha_\nu\rho^{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2} - \ldots - \alpha_1)$

Επειδή οι $\rho, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ είναι ακέραιοι έπεται ότι και ο $-\alpha_\nu\rho^{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2} - \ldots - \alpha_1$ είναι ακέραιος. Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε, ότι ο ρ είναι διαιρέτης του α_0.

Α2) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις: **(5 x 3 Μονάδες)**

i. $\log 10 = 1$ και $e^{\ln\theta} = \theta$ (σχολικό σ 174)

ii. Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
Οι λύσεις της εξίσωσης ημx=ημθ είναι x $=2\kappa\pi+\theta$ όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$ ή x$=2\kappa\pi+\pi-\theta$ όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$

iii. Αν το πολυώνυμο P(x) έχει βαθμό μ και το πολυώνυμο Q(x) έχει βαθμό ν με μ>ν, τότε το πολυώνυμο P(x)Q(x) έχει βαθμό μ+ν ενώ το πολυώνυμο P(x)+Q(x) έχει βαθμό μ.

iv. Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν ίδιο ημίτονο και οι γωνίες που διαφέρουν κατά 180° έχουν αντίθετο ημίτονο.

<u>Θέμα Β</u>

Δίνεται η συνάρτηση $P(x)=6x^3-\lambda x^2-4x+4$, όπου λ πραγματικός αριθμός και το σημείο Α(-1,-9) το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x).

Β1) Να αποδείξετε ότι λ=11.

(Μονάδες 6)

Β2) Να λύσετε την εξίσωση P(x)=0 και να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης P(x) με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 8+2)

Β3) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x) βρίσκεται πάνω από τον άξονα των x.

(Μονάδες 9)

Λύση:

Β1) Οι συντεταγμένες του σημείου Α θα επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης δηλαδή:

$$P(-1)=-9 \Leftrightarrow 6(-1)^3-\lambda(-1)^2-4(-1)+4=-9 \Leftrightarrow 6(-1)-\lambda\cdot 1+4+4=-9 \Leftrightarrow -6-\lambda+8=-9$$

$$\Leftrightarrow -\lambda=-9-8+6 \Leftrightarrow -\lambda=-11 \Leftrightarrow \lambda=11$$

Αρα $P(x)=6x^3-11x^2-4x+4$

Β2) Αφού το πολυώνυμο έχει ακέραιους συντελεστές, οι πιθανές ακέραιες ρίζες πρέπει να αναζητηθούν στους διαιρέτες του σταθερού όρου του 4.Αυτοί είναι $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4$.

Δοκιμάζουμε μία μιά τις τιμές αυτές ώσπου να βρούμε ρίζα:

$$P(1)=6\cdot 1^3-11\cdot 1^2-4\cdot 1+4=6-11-4+4=-5\neq 0$$

$P(-1)=-9\neq 0$ (από τα δεδομένα)

Για τις μεγαλύτερες τιμές θα χρησιμοποιήσουμε σχήμα Horner για ευκολία στις πράξεις και για να πάρουμε και τους συντελεστές του πηλίκου σε περίπτωση που βρούμε μια ρίζα.

Συντελεστές του P(x)				**ρ**
6	-11	-4	4	2
↓	12	2	-4	
6	1	-2	0	

Συντελεστές Πηλίκου **Υπόλοιπο**

Αρα $P(x)=6x^3-11x^2-4x+4=(x-2)(6x^2+x-2)$

Βρίσκουμε και τις ρίζες του πηλίκου $6x^2+x-2$ *(που είναι τριώνυμο)*:

Είναι $\alpha=6$, $\beta=1$, $\gamma=-2$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot 6\cdot(-2)=1+48=49$$

$$x_{2,3}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2\cdot 6}=\frac{-1\pm 7}{12}$$

$$x_2=\frac{-1+7}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$$x_3=\frac{-1-7}{12}=\frac{-8}{12}=-\frac{2}{3}$$

Αρα συνοψίζοντας οι ζητούμενες ρίζες είναι η $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=-\frac{2}{3}$

▶ Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης P(x) με τον άξονα y'y έχει τετμημένη 0 και για να βρούμε και την τετμημένη θέτουμε στον τύπο της P(x) όπου x=0 και έχουμε:

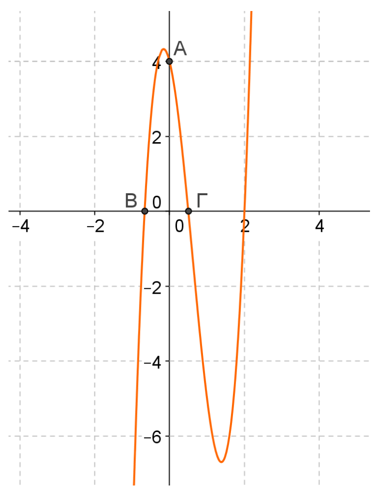
$$y=P(0)=6\cdot 0^3-11\cdot 0^2-4\cdot 0+4=4$$

Αρα το σημείο τομής είναι το Α(0,4)

Β3) Τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x) βρίσκεται πάνω από τον άξονα των x βρίσκονται από την λύση της ανίσωσης $P(x)>0$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
x-2		−		−		−	0	+	
$6x^2+x-2$		+	0	−	0	+		+	
P(x)		−	0	+	0	−	0	+	

$$x\in\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$$



Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x^2-2x+3\right)$.

Γ1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

Γ2) Να δείξετε ότι η ανίσωση $f\left(e^x\right)>\ln\left(e^x+1\right)$ μετατρέπεται ισοδύναμα στην ανίσωση $e^{2x}-3e^x+2>0$ την οποία και να λύσετε.

(Μονάδες 3+6)

Γ3) Να λύσετε την εξίσωση $f(\eta\mu x)=\ln\left(\sigma\upsilon\nu^2 x+\dfrac{7}{2}\right)$.

(Μονάδες 9)

Λύση:

Γ1. Πρέπει $x^2-2x+3>0$

Είναι $\alpha=1,\ \beta=-2,\ \gamma=3$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot1\cdot3=4-12=-8<0$$

Αφού η διακρίνουσα του τριωνύμου x^2-2x+3 είναι αρνητική, *(όπως μάθαμε στην Α Λυκείου)* το τριώνυμο θα είναι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ομόσημο του α=1>0 (με α συμβολίζουμε τον συντελεστή του x^2) δηλαδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα είναι θετικό.

Οπότε το πεδίο ορισμού είναι $D_f=\mathbb{R}$ (το D από την λέξη domain)

Γ2)

$$f\left(e^x\right)>\ln\left(e^x+1\right)\Leftrightarrow \ln\left[\left(e^x\right)^2-2e^x+3\right]>\ln\left(e^x+1\right)\overset{\text{Η συνάρτηση lnx είναι γνησίως αύξουσα}}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(e^x\right)^2-2e^x+3>e^x+1\Leftrightarrow e^{2x}-2e^x+3>e^x+1\Leftrightarrow e^{2x}-2e^x-e^x+3-1>0\Leftrightarrow$$

$$e^{2x}-3e^x+2>0$$

Θέτουμε $e^x=y>0$ (αφού και έχουμε:

Πρέπει $y^2-3x+2>0$

Είναι $\alpha=1,\ \beta=-3,\ \gamma=2$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=9-8=1$$

$$y_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\frac{3\pm1}{2}$$

$$y_1=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1 \quad \text{δεκτή}$$

$y_2 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ δεκτή αφού θετική

$y^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow y < 1$ ή $y>2$

και επειδή $y > 0$ τελικά έχουμε $0 < y < 1$ ή $y>2$

Ομως ο άγνωστός μας είναι ο x και όχι ο y.

$0 < y < 1 \Leftrightarrow 0 < e^x < 1 \Leftrightarrow 0 < e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$

$y>2 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow e^x > e^{\ln 2} \Leftrightarrow x > \ln 2$

Αρα συνοψίζοντας λύσεις είναι τα $x < 0$ ή $x > \ln 2$.

Γ3) $f(\eta\mu x) = \ln\left(\sigma\upsilon\nu^2 x + \frac{7}{2}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\eta\mu^2 x - 2\eta\mu x + 3\right) = \ln\left(\sigma\upsilon\nu^2 x + \frac{7}{2}\right)$

$\eta\mu^2 x - 2\eta\mu x + 3 = \sigma\upsilon\nu^2 x + \frac{7}{2} \Leftrightarrow 2\eta\mu^2 x - 4\eta\mu x + 6 = 2\sigma\upsilon\nu^2 x + 7$

$\Leftrightarrow 2\eta\mu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\eta\mu x + 6 - 7 = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu^2 x - 2\left(1 - \eta\mu^2 x\right) - 4\eta\mu x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\eta\mu x^2 - 2 + 2\eta\mu^2 x - 4\eta\mu x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\eta\mu x^2 - 4\eta\mu x - 3 = 0$

Θέτουμε $\eta\mu x = \omega$.Επειδή $-1 \le \eta\mu x \le 1$ θα είναι $-1 \le \omega \le 1$

Είναι $\alpha = 4$, $\beta = -4$, $\gamma = -3$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 16 + 48 = 64$

$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm 8}{8}$

$\omega_1 = \frac{4+8}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ Απορρίπτεται γιατί $\frac{3}{2} > 1$

$\omega_1 = \frac{4-8}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$

$\eta\mu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6},\ \kappa \in \mathbb{Z}$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right),\ \kappa \in \mathbb{Z}$

$x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6},\ \kappa \in \mathbb{Z}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6},\ \kappa \in \mathbb{Z}$.

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ και $g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Δ1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

(Μονάδες 6)

Δ2) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 6)

Δ3) Αφού αποδείξετε ότι $g(\ln 2)=\frac{3}{4}$ να λύσετε την ανίσωση $g(x)\geq\frac{3}{4}$.

(Μονάδες 3+5)

Δ4) Θεωρώντας γνωστή την ανισότητα $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2$ που ισχύει για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό α, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

(Μονάδες 5)

Λύση:

Δ1) Η συνάρτηση $f(x)$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα ισχύει και $-x\in\mathbb{R}$.

Επιπλέον:

$$f(-x)=\frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=f(x)$$

Αρα η συνάρτηση $f(x)$ είναι άρτια.

Δ2) Το πεδίο ορισμού της $g(x)$ είναι το $\mathbb{R}$.

Για να δείξουμε ότι η $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ πρέπει (σύμφωνα με τον ορισμό) να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει : $g(x_1)<g(x_2)$

$$x_1<x_2 \overset{\text{Η } e^x \text{ είναι γνησίως αύξουσα}}{\Longrightarrow} e^{x_1}<e^{x_2} \quad (1)$$

Επίσης $x_1<x_2 \Rightarrow -x_1>-x_2 \overset{\text{Η } e^x \text{ είναι γνησίως αύξουσα}}{\Longrightarrow} e^{-x_1}>e^{-x_2} \Rightarrow -e^{-x_1}<-e^{-x_2} \quad (2)$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) παίρνουμε:

$$e^{x_1}-e^{-x_1}<e^{x_2}-e^{-x_2} \Rightarrow \frac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{2}<\frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{2} \Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$$

Δ3) $g(\ln 2)=\frac{e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}}{2}=\frac{2-e^{\ln 2^{-1}}}{2}=\frac{2-2^{-1}}{2}=\frac{2-\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{4}{2}-\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}$

$$g(x)\geq\frac{3}{4} \Leftrightarrow g(x)\geq g(\ln 2) \overset{g(x)\text{ γνησίως αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x\geq \ln 2$$

Δ4) $f(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{x}+\frac{1}{e^{x}}\right)\geq\frac{1}{2}2=1$,

δηλαδή $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επειδή $-1\leq συνx\leq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, για να ισχύει

$f(x)=συνx$, πρέπει να βρούμε τα x για τα οποία $f(x)=συνx=1$

Η ανισότητα $α+\frac{1}{α}\geq 2$ ισχύει ως ισότητα για α=1 οπότε:

$f(x)=1\Leftrightarrow e^{x}=1\Leftrightarrow e^{x}=e^{0}\Leftrightarrow x=0$

Ομως για $x=0$ είναι και $συνx=συν0=1$

Συμπεραίνουμε ότι έχουμε μόνο μια λύση την $x=0$.